BÁRKÁNYI PÁL: FUZZY MODELL MATEMATIKAI HÁTTERE SPECIÁLIS KATONAI RENDSZEREKRE ALKALMAZVA

A katonai rendszerek műszaki megbízhatóságának vizsgálatai során, több matematikai módszert alkalmazhatunk, mint például hibamód és hatáselemzés (FMEA), HAZOP, Markov féle jelfolyam gráf és még sorolható. A módszerek közül most a Fuzzy halmazelméletre épülő elemzési technikát és modellalkotás matematikai alapjait fejtem ki, amely a FMEA eljárás egyik legújabb módszere. A cikkemben összegyűjtöttem a Fuzzy módszerrel történő vizsgálatnál alkalmazható matematikai eljárásokat és szabályokat, amelyek betartásával a legbonyolultabb rendszerek modellezéséhez szükséges számításokat lehet elvégezni.

A Fuzzy halmazelméleti módszer, amely alkalmazható a vizsgált elektronikus rendszer által keltett kiegészítő információk bizonytalansági modellekbe történő beépítésére [1] [2]. A bevezetése a vizsgálati módszernek, akkor van jelentősége, ha nem áll rendelkezésünkre a vizsgált rendszerünkről statisztikai adatok, csak a rendszer működését leíró események összessége (halmazai), illetve a rendszer által keltett alternatív kimenetek értékei.

Az új halmazelméleti módszer, amely a bizonytalanságok leírására különböző – a rendszerre jellemző – intervallumokat vezet be, a következőképpen lehet érzékelni [3] [4]:

A bemeneti feszültség 15 V

A bemeneti feszültség nagyjából 10 V és 20 V között van.

A bemeneti feszültség 10 V és 20 V között van.

1. ábra A fuzzy tagsági függvény

A szemléltetés során megpróbáltam bemutatni a fuzzy tagsági függvényt, amely leképzést végez a vizsgált rendszer alaphalmazbeli értékei és a [0,1] intervallum között. ζ(x) tagsági függvény jeleníti meg az x univerzum-elem milyen mértékben tartozik egy nyelvi értékkel leírt halmazhoz.

A fuzzy halmaz minden univerzumbeli eleméhez egy [0,1] közé eső valós számot rendelünk. A hozzárendelést tagsági függvénynek hívjuk. [5] [6] [7] [8] [9]

$X_A: U \rightarrow \{0,1\};$ (1)

(2)

,ahol az U az univerzum és X_A az A fuzzy halmaz tagsági függvénye.

Diszkrét elemű halmazok esetén:

$A = X_1 / u_1 + X_2 / u_2 + \ldots + X_n / u_n$ (3)

,ahol u_i az illető halmazelem és X_i a hozzá tartozó tagsági függvény érték.

Folytonos elemű halmazok esetén:

A = (4)

,ahol u az illető halmazelem $X_{(u)}$ a hozzá tartozó tagsági függvény értéke.

A fuzzy halmaz tagsági függvényénél az értékek nem valószínűségi mértéket jelölnek, így a fuzzy halmazoknál az univerzum elemeinek összege nem lehet mindig 1, ahogy az un univerzumhoz tartozó elemek valószínűségek összege mindig 1. A tagsági függvény értékek bármilyen tulajdonságot jelenthetnek, ezért alkalmasak bárminek a matematikai leírására.

Az U univerzumon értelmezett A fuzzy halmaz hordozójának (support) nevezzük azt a fuzzy halmazt (supp A), amely tartalmazza A minden olyan elemét, melynek tagsági függvény értéke nem zérus

(5)

,ahol U az univerzum és χ az A fuzzy halmaz tagsági függvénye.

Az *U* univerzumon értelmezett *A* fuzzy halmaz magjának (kernel) nevezzük azt a fuzzy halmazt (kernel *A*), amely tartalmazza *A* minden olyan elemét, melynek tagsági függvény értéke egy.

Az *A* fuzzy halmaz esetén:

(6)

,ahol ahol U az univerzum és χ az A fuzzy halmaz tagsági függvénye.

Fuzzy halmaz magasságának (height) a halmazban lévő legnagyobb tagsági függvény értéket nevezzük ([0,1] zárt intervallumba eső valós szám).

height $A = \max_u (\chi_A(u))$ (7)

Akkor normalizált egy fuzzy halmaz, ha a magassága 1.

height $A = 1$. (8)

Konvex egy X univerzumon értelmezett A fuzzy halmaz, ha

$\chi_A(\zeta u+(1-\zeta z)) \geq \min (\chi_A(u) , \chi_A (z))$, (9)

$\forall$ u,z $\in U$ és $\forall \zeta \in [0,1]$ (10)

Fuzzy számnak nevezzük a valós számok halmazán értelmezett A fuzzy halmazt, ha az konvex, normalizált és tagsági függvénye folytonos.

Fuzzy halmaz α-vágatának nevezzük az illető halmaz hordozójának azon részhalmazát, amely elemeihez rendelt tagsági függvény érték nem kisebb az α valós számnál:

$A_\alpha = \{ u \in u \mid \chi_A(u) \geq \alpha \}$ (11)

Fuzzy halmaz erős α-vágatának nevezzük az illető halmaz hordozójának azon részhalmazát, amely elemeihez rendelt tagsági függvény érték nagyobb az α valós számnál:

$= \{ u \in u \mid \chi_A(u) > \alpha \}$ (12)

Szinthalmaznak nevezzük valamely A fuzzy halmaz esetén azt a halmazt, amely tartalmazza az illető halmaz összes lehetséges tagsági függvény értékét:

$\Lambda A = \{ \alpha \mid \chi_A(u) = \alpha \}$, $u \in U$ (13)

Valamely fuzzy halmaz skaláris számosságának nevezzük a halmazt alkotó elemek tagsági függvény értékeinek összegét:

$|A| = \Sigma_{u\in U}\, \chi_A(u)$ (14)

,ahol A az U univerzumon értelmezett fuzzy halmaz.

A fuzzy számosság $|A\sim|$ hasonlóan értelmezhető, mint a skalár számosság, azonban eredményként fuzzy számot ad.

Tagsági függvénye:

$\chi_{|A|} (|A\alpha|) = \alpha$ (15)

,valamennyi α-ra, amely megtalálható A szinthalmazában ($\forall\ \alpha \in \Lambda A$) , ahol $|A\alpha|$ az A halmaz α-vágatának számossága (elemeinek száma).

A B fuzzy halmaz részhalmazának nevezzük az A fuzzy halmazt, ha valamennyi univerzumbeli elemére igaz, hogy az A halmaz elemeinek tagsági függvény értékei nem nagyobbak a nekik megfelelő B halmazbeli elemek tagsági függvény értékeinél:

$A \subseteq B : \chi_A (u) \leq \chi_B (u)$ valamennyi $u \in U$ esetén (16)

A és B fuzzy halmazok egyenlők, ha egymásnak megfelelő elemeik tagsági függvény értékei megegyeznek:

$A = B : \chi_A (u) = \chi_B (u)$ valamennyi $u \in U$ esetén (17)

A B fuzzy halmaz valódi részhalmazának nevezzük az A fuzzy halmazt, ha A részhalmaza B-nek és a halmazok nem egyenlők egymással:

$A \subset B : A \subseteq B$ és $A \neq B$ (18)

Fuzzy halmazműveletekre a halmazelméleti módszerek alkalmazhatóak, ahol az unionak és a metszenek a képzésekor a tagok hibái nem adódnak össze.

$\chi_{A'} (u)= \chi_A (u)\pm e_A$ és $\chi_{B'} (u)= \chi_B (u)\pm e_B$ (19)

$\chi_{A' \cup B'} (u)= \chi_{A \cup B} (u)\pm \max[e_{A,}\ e_B]$ (20)

$\chi_{A' \cap B'} (u)= \chi_{A \cap B} (u)\pm \max[e_{A,}\ e_B]$ (21)

A következőben A,B és C legyenek az U univerzumon értelmezett fuzzy halmazok.

1. kommutatív

$$A \cup\ B = B \cup\ A \qquad (22)$$

$$A \cap B = B \cap A \qquad (23)$$

2. asszociatív

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad (24)$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \qquad (25)$$

3. disztributív

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (26)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (27)$$

4. idempotenciális

$$A \cup A = A \text{ és } A \cap A = A \quad (28)$$

5. identitás

$$A \cup 0 = A \text{ és } A \cap X = A \quad (29)$$

$$A \cap 0 = 0 \text{ és } A \cup X = X \quad (30)$$

6. tranzitív

$$\text{ha } A \subseteq B \subseteq C \text{ akkor } A \subseteq C \quad (31)$$

7. involució

$$= A \quad (32)$$

8. Fuzzy halmazok esetén is alkalmazhatók a DeMorgan szabályok:

$$A \cap B = A \cup B \quad (33)$$

$$A \cup B = A \cap B \quad (34)$$

$$\cup\, A \neq U \text{ és } A \cap \; \neq 0 \quad (35)$$

A fuzzy reláció halmazok elemeinek összerendeltség mértékét határozza meg. Az n darab halmaz között értelmezett fuzzy reláció az n dimenziós tér pontjaihoz rendel tagsági függvény értéket.

Az n darab A_1 , A_2 , ... , A_n halmaz fuzzy relációja az $U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$ univerzumon értelmezett fuzzy halmaz, ahol A_i az U_i univerzumon értelmezett halmaz és a "×" a direkt (Descartes) szorzat jele:

$$R_{A1\times...\times An} = \{ ((a_1,a_2,...,a_n) , \chi_R(a_1,a_2,...,a_n)) \mid (a_1,a_2,...,a_n) \in A_1\times A_2\times...\times A_n \} \quad (36)$$

Az n darab A_1 , A_2 , ... , A_n fuzzy halmaz direkt szorzata az $U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$ univerzumon értelmezett fuzzy halmaz, ahol Ai az U_i univerzumon értelmezett fuzzy halmaz:

$$R_{A1\times...\times An} = \{ ((a_1,a_2,...,a_n) , \chi_R (a_1,a_2,...,a_n)) \quad (37)$$

$(a_1,a_2,...,a_n) \in A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$, $\chi_R (a_1,a_2,...,a_n) = \text{mini}(\chi (a_i)$ } (38)

Két tetszőleges halmaz relációját bináris relációnak nevezzük.

Amennyiben két relációt P(X,Y), Q(Y,Z) ugyanazon az Y halmazon értelmezünk, úgy a két reláció kompozícióját R(X,Z) a következő relációként értelmezhetjük:

$R(X,Z) = P(X,Y) \text{ º } Q(Y,Z)$, (39)

,ahol R(X,Z) az X×Z univerzumon értelmezett reláció és $(x,z) \in R(X,Z)$

,ha létezik legalább egy $y \in Y$,hogy

$(x,y) \in P(X,Y)$ és $(y,z) \in Q(Y,Z)$ (40)

A kompozíció definíciójából adódó általános tulajdonságok:

$P(X,Y) \text{ º } Q(Y,Z) \neq Q(Y,Z) \text{ º } P(X,Y)$ (41)

$(P(X,Y) \text{ º } Q(Y,Z))\text{-}1 = Q(Y,Z)\text{-}1 \text{ º } P(X,Y)\text{-}1$ (42)

$(P(X,Y) \text{ º } Q(Y,Z)) \text{ º } R(Z,V) = P(X,Y) \text{ º } (Q(Y,Z) \text{ º } R(Z,V)) = P(X,Y) \text{ º } Q(Y,Z) \text{ ºº}$
$R(Z,V)$ (43)

Két fuzzy reláció kompozíciójánál a reláció elemeihez több módon is rendelhetünk tagsági függvényt. Az egyes elemekhez rendelt tagsági függvény értéket (max-min kompozíció esetén) a következő módon nyerjük:

$\chi_P \text{ º } Q(x,z) = \max_{y \in Y} \min[\chi_P (x,y) , \chi_Q (y,z)]$ (44)

, valamennyi $x \in X$, $z \in Z$ esetén.

Összefoglalás

Írásomban Fuzzy elemzési módszert illetve matematikai megoldását emeltem ki, amely a speciális katonai elektronikus rendszerek műszaki megbízhatóságának vizsgálatakor alkalmazható. A speciális katonai rendszerek komplexitásából következően szerteágazó feladatok megoldására kell kialakítani, attól függően, hogy hol, mikor és hogyan kerül alkalmazásra. A matematikai eljárásokkal a legbonyolultabb rendszereket is modellezni lehet, így a speciális katonai rendszerek modellezését is könnyedén elvégezhetjük a fuzzy modell alkalmazásával.

Irodalomjegyzék

[1] K. T. L. -. T. Domonkos:, Fuzzy rendszerek, Typotext, szerk., Budapest: Typotext, 2000.

[2] Y. M. –. Z. L. Ali, A methodology for fuzzy modeling of engineering systems, pp 181-197.: Fuzzy Sets and Systems, 2001.

[3] K. -. L. -. M. -. S. -. M. M.L.Zhu, Fuzzy Assessment for FMEA Engine, pp.17-29: Elsevier Science Ltd, 2002.

[4] V. Kurková., Kolmogorov’s theorem and multilayer neural networks., pp. 501–506: Neural Networks, 1992.

[5] H. D. –. C. J. R. Cheng, Automatically Determine the Membership Function Based on the Maximum Entropy Principle, pp. 163-182.: Information Sciences 96, 1996.

[6] W. Rödder., On „and” and „or” connective in fuzzy set theory. Operations res., Technical University of Aachen, 1975.

[7] H. N. a. V. Kreinovich., On approximations of controls by fuzzy systems. Technical Report TR 92-93/302, LIFE Chair of Fuzzy Theory, Tokyo: Tokyo Institute of Technology, 1992.

[8] C. V. Negotia, Expert Systems and Fuzzy Systems., CA: Benjamin Cummings, Menlo Parko, 1985.

[9] L. T. K. a. A. Zorat., Fuzzy systems and approximation., pp. 203–222: Fuzzy Sets and Systems, 1997.